EXERCICE III – Un vol inaugural un peu particulier (11 points)

A – Le retour des propulseurs latéraux sur Terre

1. En utilisant le principe d'inertie, interpréter le fait que la vitesse puisse être approximativement constante pendant une certaine durée au cours de la descente alors que les moteurs sont éteints (approximativement entre 420 s et 430 s).

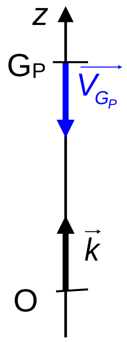
Système : propulseur Référentiel : le sol

D'après le principe d'inertie, si les forces exercées sur le propulseur se compensent $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}} = \vec{0}$ alors son mouvement est rectiligne et uniforme $\overrightarrow{V_{G_P}} = \overrightarrow{Cte}$.

La force poids est donc compensée par une autre force et il ne s'agit pas de la force de poussée des moteurs dont on nous dit qu'ils sont éteints. La seule force verticale et orientée vers le haut est la force de frottement de l'atmosphère sur le propulseur, elle doit donc compenser le poids pendant quelques instants, lorsque la vitesse est encore très élevée.

2. Lien entre vitesse et altitude

2.1. Faire un schéma (sans souci d'échelle) de la situation lors de la descente sur lequel figurent l'axe (Oz), un vecteur unitaire $\vec{k}$, le point G_P et le vecteur vitesse du centre de masse.



L'axe Oz est orienté vers le haut, l'origine O est choisie au sol.

2.2. Rappeler la définition du vecteur vitesse du centre de masse G_P.

$$\overrightarrow{v_{G_P}} = \frac{d\overrightarrow{OG_P}}{dt}$$

2.3. Établir la relation entre la norme de la vitesse *v* et la dérivée de l'altitude *z* par rapport au temps, et indiquer qualitativement pourquoi cette relation est en accord avec les courbes de la figure 2.

$$v = \sqrt{v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$\frac{dz}{dt}$ est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de l'altitude *z* en fonction du temps.

Entre 420 et 430 s, la courbe représentative de l'altitude *z* en fonction du temps est une droite d'équation $z = k.t + b$ avec $k < 0$, ainsi $\frac{dz}{dt} = k$ donc la vitesse est constante.

3. Déterminer graphiquement, en explicitant la démarche, la valeur de la norme du vecteur accélération du centre de masse du propulseur dans la dernière phase de l'atterrissage (t > 467 s).

Pour $t > 467$ s, la courbe représentative de la vitesse en fonction du temps est une droite, ainsi la vitesse est une fonction affine du temps $v = m.t + p$.

On prend deux points sur cette droite A($t_A = 470$ s ; $v_A = 275$ m.s^{-1}) et B($t_B = 500$ s; $v_B = 20$ m.s^{-1})

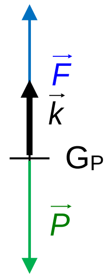
$m = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$ *m* est égal au coefficient directeur de cette droite

$m = \frac{20 - 275}{500 - 470} = -8{,}5$ m.s^{-2}

$a = \sqrt{m^2} = 8{,}5$ m.s^{-2}

4. Pour modéliser l'atterrissage dans les quatre dernières secondes, on choisit de considérer que l'action de l'air est négligeable (la vitesse étant alors suffisamment faible) et que la masse du propulseur est constante (masse à l'atterrissage notée M). On note $\vec{F}$ la force dite de poussée exercée sur le propulseur grâce à un unique moteur Merlin en marche.

4.1. Représenter sur un schéma, sans soucis d'échelle, les forces exercées sur le propulseur. Le schéma doit être en accord avec les réponses aux questions précédentes.



La force de poussée est supérieure à la force poids.
Alors $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}} = \vec{P} + \vec{F}$ est orienté vers le haut
et d'après la deuxième loi de Newton $\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}} = M.\vec{a}$,
soit $\vec{a} = \dfrac{\Sigma\overrightarrow{F_{Ext.}}}{M}$ est aussi orientée vers le haut.

4.2. Exprimer puis évaluer la valeur de la norme de la force de poussée. Commenter le résultat obtenu.

$\vec{F} + \vec{P} = M.\vec{a}$

$F.\vec{k} - M.g.\vec{k} = M.a.\vec{k}$

$F = M.g + M.a = M.(g+a)$

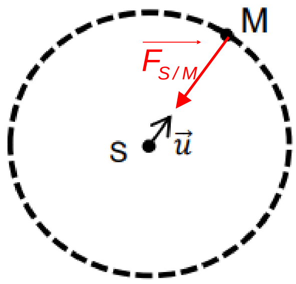
$F = 25{,}3\times10^3 \times (9{,}81 + 8{,}5) = 463243$ N = 463 kN.

Il est indiqué que la poussée maximale d'un moteur Merlin vaut 845 kN, valeur compatible avec celle calculée. Le moteur fournit $\dfrac{463}{845}$ = 54,8 % de sa poussée maximale lors de l'atterrissage.

Pour les questions (4.1. et 4.2.), le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

B – Le mouvement de la planète Mars

1. Reproduire sur la copie le schéma représentant la trajectoire circulaire du centre de masse de Mars autour du Soleil et représenter la force exercée par le Soleil sur Mars.



2. Établir l'expression du vecteur accélération du centre de Mars en fonction de G, M_S, d_{MS} et $\vec{u}$.

Système : {Mars}   Référentiel : héliocentrique considéré galiléen
Inventaire des forces :
uniquement la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil
Deuxième loi de Newton :

$\overrightarrow{F_{S/M}} = M.\vec{a}$

$-\dfrac{G.M.M_S}{d_{MS}^{\ 2}}.\vec{u} = M.\vec{a}$

$\vec{a} = -\dfrac{G.M_S}{d_{MS}^{\ 2}}.\vec{u}$

3. Vitesse de Mars sur son orbite.
3.1. À l'aide de l'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet, en déduire que le mouvement de Mars, considéré circulaire, est également uniforme dans le référentiel héliocentrique.

Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_\tau} + \frac{v^2}{d_{MS}}.\overrightarrow{u_n}$

D'après la réponse précédente, $\vec{a} = -\frac{G.M_S}{{d_{MS}}^2}.\vec{u}$ or $\overrightarrow{u_n} = -\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{a} = \frac{G.M_S}{{d_{MS}}^2}.\overrightarrow{u_n}$.

Par analogie entre ces deux expressions de $\vec{a}$, on en déduit que $\frac{dv}{dt} = 0$.

Le mouvement de Mars est bien uniforme si la trajectoire est considérée circulaire.

3.2. En déduire l'expression puis la valeur de la vitesse de Mars dans ce référentiel.

Par analogie entre les deux expressions de $\vec{a}$, on en déduit que $\frac{v^2}{d_{MS}} = \frac{G.M_S}{{d_{MS}}^2}$.

$v^2 = \frac{G.M_S}{d_{MS}}$, soit $v = \sqrt{\frac{G.M_S}{d_{MS}}}$.

4. Exprimer la période, notée T_M, de révolution de Mars autour du Soleil. Vérifier par un calcul qu'elle est voisine de 690 jours.

Mars parcourt son orbite circulaire de rayon d_{MS} en une durée T_M, ainsi $v = \frac{2\pi.d_{MS}}{T}$.

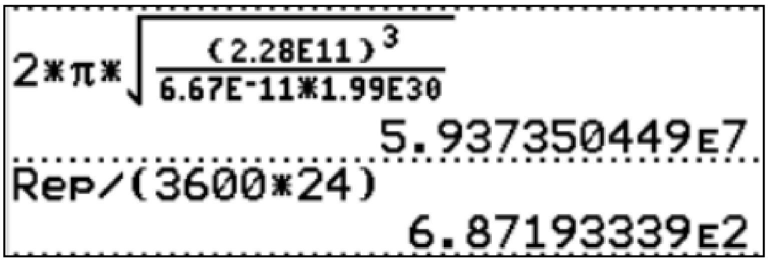
$$\frac{2\pi.d_{MS}}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{d_{MS}}}$$

$$\frac{(2\pi)^2.d_{MS}^2}{T^2} = \frac{G.M_S}{d_{MS}}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2.{d_{MS}}^3}{G.M_S}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{{d_{MS}}^3}{G.M_S}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(2,28\times10^8\times10^3\right)^3}{6,67\times10^{-11}\times1,99\times10^{30}}} = 5,94\times10^7 \text{ s}$$



On convertit en jours (1 jour contient 24 h de 3600 s).
T =687 jours. Valeur effectivement voisine de 690 jours.

C – Davantage de carburant dans un même volume
1. Le refroidissement du LOX.
1.1. Le diazote reste liquide tant que sa température est inférieure à T_1 = 77 K, mais le sujet ne donne pas sa température.
Tandis que celle du LOX liquide est donnée et égale à T_2 = 66 K.

Le transfert d'énergie a lieu du corps « chaud » vers le corps « froid ».
Pour que le diazote joue son rôle d'abaisser la température du LOX, il faut que le diazote soit à une température inférieure à 66 K, alors le transfert d'énergie aura lieu du LOX vers le diazote.

La température du diazote augmente et il est nécessaire de le refroidir sans cesse sous peine de le voir passer à l'état gazeux.

1.2. Énergie Q transférée du LOX vers le diazote lors du refroidissement du LOX de 10°C.
Système {LOX}
Température initiale T_i, Température finale $T_f = T_i - 10$
D'après le premier principe de la thermodynamique, le LOX cède autant d'énergie Q vers le diazote qu'il a perdu d'énergie interne ΔU.
$Q = \Delta U = M.c.(T_f - T_i)$
$Q = \Delta U = 287{,}4\times10^3\times1659\times(T_i - 10 - T_i)$
$Q = \Delta U = -4{,}767966\times10^9$ J = – 4,8 GJ

2. Le flux d'énergie entre le LOX et le milieu extérieur a pour expression $\Phi = P = h.S.(T_{air} - T)$.
et $\Phi = P = \dfrac{Q}{\Delta t}$ soit $Q = P.\Delta t$.
$Q = h.S.(T_{air} - T).\Delta t$

Et on a établi précédemment que $Q = \Delta U = M.c.(T_f - T_i) = M.c.\Delta T$

Ainsi $h.S.(T_{air} - T).\Delta t = M.c.\Delta T$, donc $\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{h.S.(T_{air} - T)}{M.c}$
Lorsque Δt tend vers zéro, la limite de $\dfrac{\Delta T}{\Delta t}$ est égale à la dérivée de T par rapport au temps notée $\dfrac{dT}{dt}$.
$$\frac{dT}{dt} = \frac{h.S.(T_{air} - T)}{M.c}$$
$M.c.\dfrac{dT}{dt} = h.S.(T_{air} - T)$ équation différentielle vérifiée par la température du LOX

3. En mathématiques, on écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = a.y + b$ et les solutions de cette équation différentielle ont pour forme $y(x) = K.e^{a.x} - \dfrac{b}{a}$.
La solution unique est obtenue avec la condition initiale $y(0)$.

Adaptons l'équation différentielle pour l'écrire sous cette même forme
$\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{h.S}{M.c}.T + \dfrac{h.S.T_{air}}{M.c}$ $\qquad y' = a.y + b$

$T(t) = K.e^{-\frac{h.S}{M.c}.t} - \dfrac{\frac{h.S.T_{air}}{M.c}}{-\frac{h.S}{M.c}}$ $\qquad y = K.e^{a.x} - \dfrac{b}{a}$

$$T(t) = K.e^{-\frac{h.S}{M.c}.t} + T_{air}$$
Condition initiale $T(t = 0) = T_i$
$$T(t = 0) = K.e^0 + T_{air} = T_i$$
Donc $K = T_i - T_{air}$
$$T(t) = (T_i - T_{air}).e^{-\frac{h.S}{M.c}.t} + T_{air}\ .$$
Le sujet indique comme solution $T(t) = T_{air} + A.\exp(-\dfrac{t}{\tau})$.
Par analogie, on en déduit que $A = T_i - T_{air}$
et que $-\dfrac{h.S}{M.c} = -\dfrac{1}{\tau}$ donc $\tau = \dfrac{M.c}{h.S}$
$$T(t) = (T_i - T_{air}).e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{air}$$

Signification physique de la constante τ :
Au bout d'une durée égale à 5τ, la température du système n'évolue plus et est égale à T_{air}.

$$T(5\tau) = (T_i - T_{air}).e^{-\frac{5\tau}{\tau}} + T_{air}$$
$$T(5\tau) = (T_i - T_{air}).e^{-5} + T_{air}$$
$$T(5\tau) \simeq T_{air}$$

4.1. La tangente, à la date t = 0, à la courbe représentative de T en fonction du temps coupe l'asymptote horizontale à la date $t = \tau$.
On en déduit que $\tau_B > \tau_A$

$$\frac{M.c}{h_B.S} > \frac{M.c}{h_A.S}$$
$$\frac{1}{h_B} > \frac{1}{h_A}$$

$h_B < h_A$
Donc pour la courbe A, on a $h_A = h_2$ = 60 W.K^{-1}.m^{-2} et pour la courbe B $h_B = h_1$ = 1,0 W.K^{-1}.m^{-2}.

4.2. L'énoncé indique « Pour que l'augmentation de température du LOX dans le réservoir ne soit pas trop importante, le remplissage se fait pendant les 45 minutes précédant le décollage. »
Ce qui signifie que l'augmentation de 10°C du LOX nécessite un peu plus de 45 minutes.
On regarde l'évolution de T à partir de la date t = 0 s où T_i =66 K.
La courbe A montre une augmentation de 20 K en 1 h, tandis que la courbe B montre une augmentation de 80 – 66 = 14 K en 30 h.
La simulation donnant la courbe A rend mieux compte de la situation réelle étudiée.
On en déduit qu'une augmentation de 10 K aurait lieu en 30 min.

5. À l'aide de l'équation différentielle établie à la question 2, justifier que quelle que soit la valeur de la constante d'échange *h*, la dérivée de la température par rapport au temps $\frac{dT}{dt}$ peut être considérée constante au début du réchauffement (par exemple pour les dix premiers degrés).

$$M.c.\frac{dT}{dt} = h.S.(T_{air} - T)$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{h.S}{M.c}.(T_{air} - T)$$

Pour $t \to \infty$ alors $T = T_{air}$; graphiquement, on lit $T_{air} \approx 290$ K
À la date t = 0s, T_i = 66 K ainsi $T_{air} - T$ = 224 K.
Après une augmentation de 10 K, alors $T_{air} - T$ = 234 K.
On voit que le terme $T_{air} - T$ subit une variation relative de $\frac{10}{224}$ = 5%, celle-ci est suffisamment faible pour que l'on puisse effectivement considérer la dérivée de la température par rapport au temps $\frac{dT}{dt}$ comme constante.
Remarque : graphiquement pour une hausse de 10K, on remarque que la courbe représentative de T en fonction du temps ressemble à une droite.
On pourrait, sur cette partie, modéliser par une fonction affine du temps T = a.t +b.
Ainsi $\frac{dT}{dt}$ = a = Cte.

6. Pour la modélisation, on a retenu la valeur h_2 = 60 W.K^{-1}.m^{-2} qui donne une augmentation de 10 K en 30 min.
Comme indiqué en 4.2., l'augmentation de température de 10 K doit en réalité nécessiter plutôt une heure. La valeur de h choisie semble donc un peu trop grande.