EXERCICE 1 - VOL D'UNE MONTGOLFIÈRE (10 points)

Une montgolfière est un moyen de transport aérien constitué d'une nacelle pouvant contenir des passagers.
Au-dessus de la nacelle, se trouvent :
- une enveloppe en nylon appelée le ballon dont on considère le volume constant ;
- un brûleur permettant de réaliser la combustion de propane dans le dioxygène de l'air ; ce propane est stocké dans des bonbonnes transportées dans la nacelle.

De nombreuses sorties sont proposées, d'une durée moyenne d'une heure. Une voiture est contrainte de suivre au sol la montgolfière pour récupérer les passagers et le matériel lors de l'atterrissage. En effet, le lieu d'atterrissage ne peut pas être connu de façon sûre au moment du départ : il est dépendant des conditions météorologiques.

Les objectifs de cet exercice sont :
- de déterminer la masse totale qu'il est possible d'embarquer dans la montgolfière ;
- de trouver l'autonomie de vol maximale possible avec la montgolfière.

Source : pixabay.com

On étudie dans cet exercice une enveloppe en nylon de modèle « M-77 » de 0,1 mm d'épaisseur, de volume V = 2 200 m^3, à laquelle on accroche une nacelle de modèle « C-1 », de masse $m_{nacelle}$ = 56 kg. La nacelle est capable d'embarquer jusqu'à trois personnes ainsi que quatre bonbonnes pesant chacune 40 kg et contenant 20 kg de propane chacune.

D'après le site Internet https://escholarship.org/

Données :
- intensité de la pesanteur terrestre : g = 9,81 m·s^{-2} ;
- surface de l'enveloppe du ballon : S = 847 m^2 ;
- masse par unité de surface de l'enveloppe en nylon : φ_{nylon} = 65 g·m^{-2} ;
- constante du gaz parfait : R = 8,314 J·mol^{-1}·K^{-1} ;
- masse molaire de l'air : M_{air} = 29,0 g·mol^{-1}.

1. Détermination de la masse totale qu'il est possible d'embarquer dans la montgolfière

Au cours d'un vol, la montgolfière se trouve à une altitude de 1,5 km. On considère que la pression p à l'intérieur du ballon est égale à la pression à l'extérieur du ballon. La figure 1 présente l'évolution de la pression de l'air en fonction de l'altitude. L'air est considéré comme un gaz parfait.
Le brûleur n'est pas actionné au moment où on étudie le système.

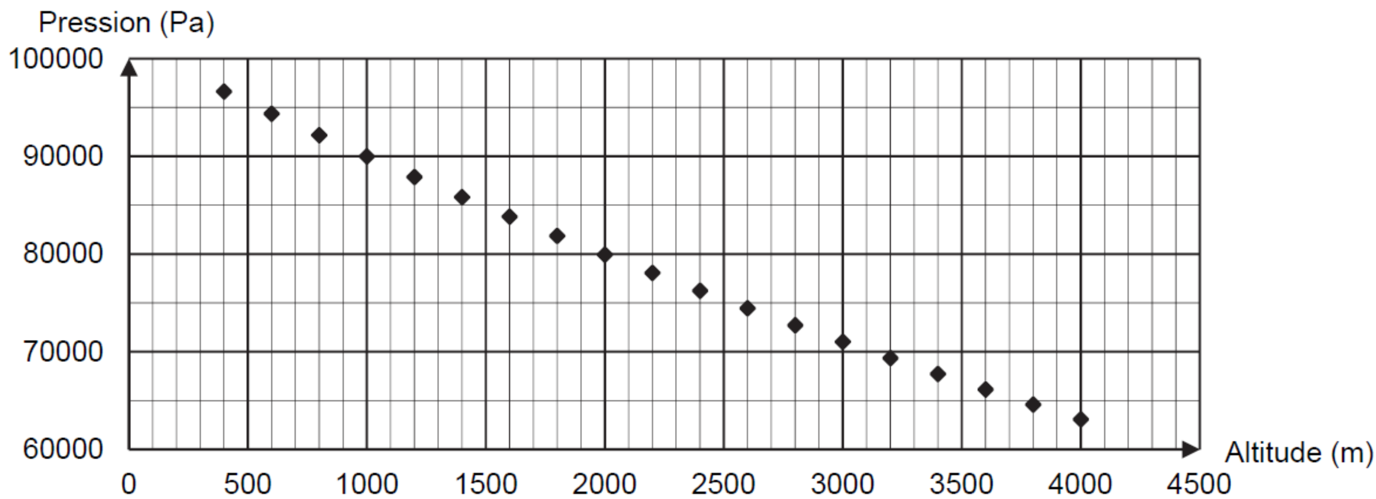


Figure 1. Pression de l'air en fonction de l'altitude

1.1. Étude du système « ballon ».

1.1.1. À l'aide de l'équation d'état du gaz parfait, exprimer la masse volumique de l'air contenu dans le ballon ρ_{int} en fonction de la pression p, M_{air}, R et T, la température de l'air contenu dans le ballon.

Équation d'état du gaz parfait : $p\times V = n_{air}\times R\times T$

Or $n_{air} = \dfrac{m_{air}}{M_{air}} = \dfrac{\rho_{int}\times V}{M_{air}}$ **donc :** $p\times V = \dfrac{\rho_{int}\times V}{M_{air}}\times R\times T$

En simplifiant par le volume V : $p = \dfrac{\rho_{int}}{M_{air}}\times R\times T$

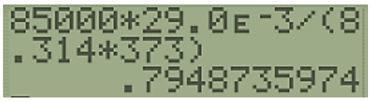
Finalement : $\rho_{int} = \dfrac{p\times M_{air}}{R\times T}$

1.1.2. Montrer que la valeur de la masse volumique de l'air contenu dans le ballon ρ_{int} lorsque le ballon est à une altitude de 1,5 km est de l'ordre de 0,8 kg·m^{-3}. On suppose que la température de l'air à l'intérieur du ballon à l'instant où on étudie le système est à 373 K.

À 1,5 km d'altitude, la figure 1 donne p = 85 000 Pa.

En convertissant M_{air} en kg·mol^{-1} : M_{air} = 29,0 g.mol^{-1} = 29,0×10^{-3} g.mol^{-1}

$\rho_{int} = \dfrac{85\ 000\times 29{,}0\times 10^{-3}}{8{,}314\times 373}$ **= 0,795 kg·m^{-3}**.



Valeur de l'ordre de 0,8 kg·m^{-3}.

1.2. Étude du système « montgolfière ».

On suit le déplacement du centre de masse G de la montgolfière. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{k})$ présenté sur la figure 2. L'origine au point O est au niveau du sol, au point de décollage de la montgolfière.

Figure 2. Système d'axes et vecteurs unitaires associés au référentiel terrestre

On considère qu'il s'exerce seulement deux forces sur le système {montgolfière} composé de la nacelle, de
son chargement et du ballon :

- le poids $\vec{P}$
- la poussée d'Archimède qui modélise l'action de l'air sur le ballon : $\vec{P_A} = \rho_{ext}\times V\times g\times\vec{k}$ où ρ_{ext} représente la masse volumique de l'air extérieur et V représente le volume total de la montgolfière, dont on considère qu'il est égal au volume du ballon.

On considère que la masse d'air présente dans le ballon est constante et que la montgolfière, de masse totale m, reste immobile. À la température locale et à l'altitude du vol de 1,5 km, la masse volumique de l'air extérieur au ballon vaut 1,06 kg·m^{-3} tandis que la masse volumique de l'air à l'intérieur du ballon vaut 0,80 kg·m^{-3}.

1.2.1. Représenter les deux forces s'exerçant sur la montgolfière dans le cas où elle est immobile dans le référentiel terrestre, sans souci d'échelle en utilisant le système d'axes de la figure 2. Justifier.

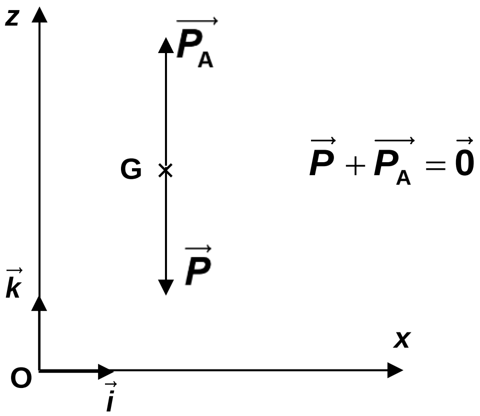
Le système {montgolfière} est immobile. Il est soumis à deux forces :

- le poids $\vec{P}$, force verticale orientée vers le bas ;

- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$, force verticale orientée vers le haut.

D'après le principe d'inertie, ces deux forces se compensent : $\vec{P} + \overrightarrow{P_A} = \vec{0}$

On représente ces deux forces sur le centre de masse G du système :



1.2.2. Donner l'expression vectorielle du poids $\vec{P}$ de la montgolfière.

Dans le repère d'espace $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$: $\vec{P} = -P \times \vec{k} = -m \times g \times \vec{k}$

1.2.3. Établir l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$ en fonction de g, m et $\vec{k}$.

Les deux forces se compensent donc : $\overrightarrow{P_A} = -\vec{P} = m \times g \times \vec{k}$

1.2.4. En déduire la masse totale embarquée dans la nacelle à cette altitude. Commenter.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti.
La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

Les deux forces se compensent donc : $P = P_A$
Soit : $m \times g = \rho_{ext} \times V \times g$
Donc : $m = \rho_{ext} \times V$
$m = 1{,}06 \text{ kg·m}^{-3} \times 2\,200 \text{ m}^3 = 2{,}33 \times 10^3$ kg.

Cette masse comprend :
– la masse de la nacelle 56 kg ;
– la masse de l'enveloppe de la montgolfière : $\varphi_{nylon} \times S = 65 \times 10^{-3} \times 847 = 55$ kg ;
– la masse de l'air contenu dans le ballon : $\rho_{int} \times V = 0{,}80 \times 2200 = 1760$ g ;
– la masse des quatre bouteilles de gaz pesant chacune 40 kg : 4×40 = 260 kg ;
– la masse des 3 personnes (masse d'une personne estimée à 70 kg) : 210 kg.
(56 + 55 + 1760 + 260 + 210) kg = 2341 kg ≈ $2{,}34 \times 10^3$ kg masse voisine de $2{,}33 \times 10^3$ kg.

2. Détermination de l'autonomie maximale de vol de la montgolfière

En réalité, la montgolfière ne reste pas à une altitude constante. Son altitude varie autour d'une altitude moyenne, au gré de l'actionnement du brûleur par le pilote. L'utilisation du brûleur est nécessaire pour maintenir une altitude moyenne constante.
On considère que la montgolfière est en vol, stabilisée à une altitude moyenne de 1,5 km. La température extérieure est T_{ext} = 278 K au cours d'un vol.
On cherche à établir le bilan énergétique entre le système {air à l'intérieur de l'enveloppe + enveloppe} et le milieu extérieur.

2.1. Nommer les trois modes de transferts thermiques. Caractériser qualitativement ces trois modes.

Les trois modes de transferts thermiques sont :

- **Par conduction : l'agitation thermique se propage de proche en proche sans déplacement de matière. Ce mode de transfert thermique a lieu principalement dans les solides.**
- **Par convection : l'agitation thermique se propage de proche en proche avec déplacement de matière. Ce mode de transfert thermique a lieu principalement dans les fluides (liquides et gaz).**
- **Par rayonnement : l'agitation thermique est modifiée par absorption ou émission de rayonnement. Ce transfert thermique a lieu dans tous les milieux y compris le vide.**

La figure 3 présente les transferts thermiques qui ont lieu entre le système {ballon} et le milieu extérieur. On rappelle que le ballon représente l'enveloppe en nylon et l'air contenu à l'intérieur. En régime stationnaire, la montgolfière est en équilibre thermique.

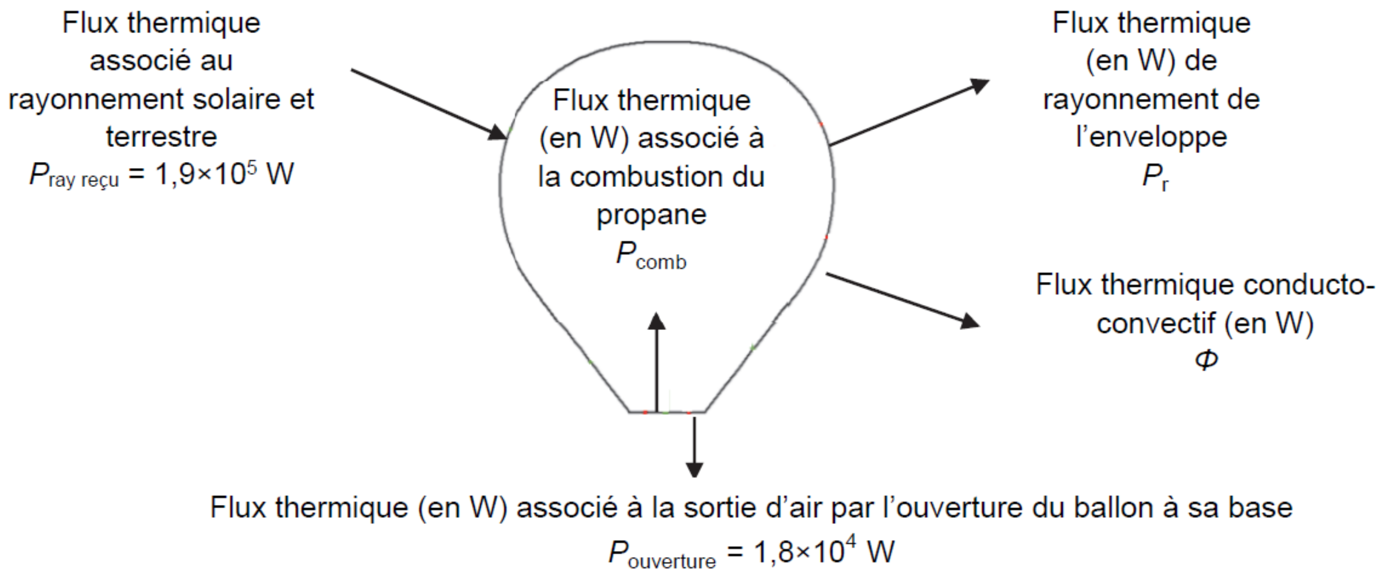


Figure 3. Bilan de puissance du système

2.2. À l'aide de la figure 3, établir une relation littérale entre les flux thermiques impliqués pour le système lorsque la montgolfière est à l'équilibre thermique.

Lorsque la montgolfière est à l'équilibre thermique les flux thermiques de compensent soit :

$$\boldsymbol{P_{\text{ray reçu}} + P_{\text{comb}} + P_{\text{ouverture}} + P_{\text{r}} + \Phi = 0}$$

Dans cette relation, les flux thermiques :

$P_{\text{ray reçu}}$ et P_{comb} sont positifs car reçus par le système

$P_{\text{ouverture}}$, P_{r} et Φ sont négatifs car cédés par le système.

Une partie du transfert thermique a lieu sous forme de rayonnement de l'enveloppe vers le milieu extérieur.

Le calcul du flux thermique rayonné se fait grâce à la relation de Stefan-Boltzmann : $P_{\text{r}} = \varepsilon\cdot\sigma\cdot S\cdot T^4$ avec :

- P_{r} le flux thermique rayonné ;
- ε le coefficient d'émissivité constant sans unité, pour l'enveloppe du ballon : $\varepsilon = 0{,}87$;
- σ la constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4};
- S la surface de l'enveloppe ;
- T la température de surface de l'enveloppe en K.

De plus, les mouvements de l'air extérieur le long de l'enveloppe sont à l'origine d'un flux thermique transféré vers l'extérieur par un phénomène de conducto-convection que l'on peut calculer grâce à la relation suivante : $\Phi = \dfrac{\Delta T}{R_{\text{th}}}$.

- Φ représente le flux thermique perdu par le système par conducto-convection en W ;
- ΔT représente la différence de température entre l'enveloppe et le milieu extérieur en K ;
- R_{th} représente la résistance thermique associée au flux thermique entre l'enveloppe et le milieu extérieur : $R_{\text{th}} = 3{,}5\times10^{-4}$ K·W^{-1}

D'après l'étude, dans ces conditions, la température de l'enveloppe vaut T = 325 K, température intermédiaire entre celle de l'air à l'intérieur du ballon et celle de l'air à l'extérieur du ballon.

2.3. Calculer le flux thermique par rayonnement P_r émis par l'enveloppe vers le milieu extérieur.

Le flux thermique par rayonnement P_r est négatif :

$\boldsymbol{P_r = -\,\varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4}$

$\boldsymbol{P_r = -\,0{,}87 \times 5{,}67\times10^{-8} \times 847 \times (325)^4 = -\,4{,}7\times10^5\ \mathrm{W}}$

(Valeur exacte stockée en mémoire).

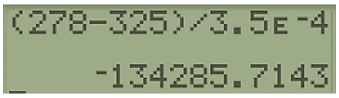
2.4. Calculer le flux conducto-convectif *Φ*.

Le flux conducto-convectif *Φ* est négatif.

La température de l'air extérieur est 278 K et celle de l'enveloppe est 325 K.

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{(278-325)}{3{,}5\times10^{-4}} = -\,1{,}3\times10^5\ \mathrm{W}}$$

(Valeur exacte stockée en mémoire).



2.5. En déduire que la valeur du flux thermique P_{comb} associé à la combustion du propane en régime de croisière est de l'ordre de 4×10^5 W.

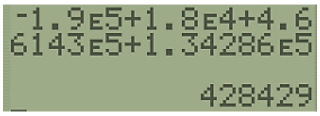
$\boldsymbol{P_{ray\ reçu} + P_{comb} + P_{ouverture} + P_r + \Phi = 0}$

$\boldsymbol{P_{comb} = -\,P_{ray\ reçu} - P_{ouverture} - P_r - \Phi}$

$\boldsymbol{P_{comb} = -\,1{,}9\times10^5 + 1{,}8\times10^4 + 4{,}66\ldots\times10^5 + 1{,}34\ldots\times10^5}$ **($P_{ouverture} < 0$; $P_{ouverture} = -\,1{,}8\times10^4$ W)**

$\boldsymbol{P_{comb} = 4{,}3\times10^5\ \mathrm{W}}$.

P_{comb} est bien de l'ordre de 4×10^5 W.



Le flux thermique associé à la combustion du propane n'est pas libéré de façon continue. En effet, la combustion du propane n'a lieu que lorsque le brûleur fonctionne. L'énergie de combustion massique du propane est : $E_{comb} = 46{,}4\ \mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$.

Le pilote actionne le brûleur pendant une durée τ selon le fonctionnement décrit sur la figure 4.
Lorsque le brûleur est en fonctionnement, 68 grammes de propane sont brûlés chaque seconde.

2.6. Montrer que le flux thermique associé à la combustion du propane lorsque le brûleur est en fonctionnement est de l'ordre de 3×10^6 W.

Le brûleur fonctionne pendant la durée τ = 2,0 s.

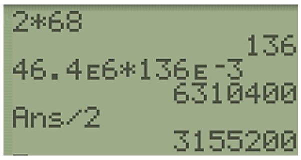
Pendant cette durée une masse m_{prop} = 2×68 g = 136 g = 136×10^{-3} kg de propane est brûlée.

Cela correspond à une énergie de combustion : $E'_{comb} = E_{comb} \times m_{prop}$

$$\boldsymbol{E'_{comb} = 46{,}4\times10^6\ \mathrm{J.kg^{-1}} \times 136\times10^{-3}\ \mathrm{kg} = 6{,}31\times10^6\ \mathrm{J}}$$

La relation entre énergie, puissance et durée est : $E_{comb} = P'_{comb} \times \tau$

$$\boldsymbol{P'_{comb} = \frac{E'_{comb}}{\tau} = \frac{6{,}31\ldots\times10^6}{2{,}0} = 3{,}2\times10^6\ \mathrm{W}}$$



Le flux thermique est bien de l'ordre de 3×10^6 W.

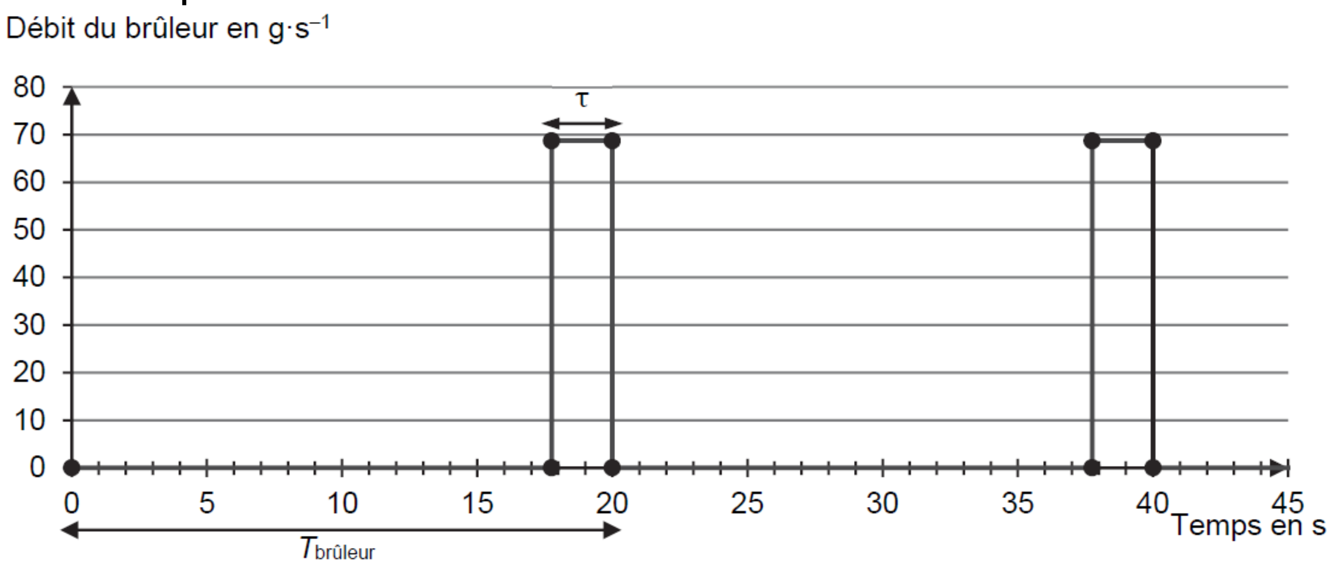


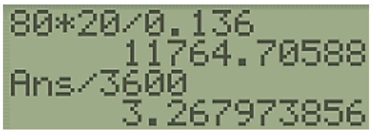
Figure 4. Débit de sortie du propane du brûleur en fonction du temps

2.7. Dans les conditions de l'étude, déterminer la durée maximale de vol qu'il est possible de réaliser à l'aide du propane embarqué dans la montgolfière. Commenter.

Toutes les $T_{\text{brûleur}}$ = 20 s le brûleur consomme 0,136 kg de propane.

La nacelle embarque quatre bonbonnes contenant 20 kg de propane chacune soit une masse totale de 80 kg.

La durée maximale du vol est donc : $\Delta t = \dfrac{\mathbf{80\ kg \times 20\ s}}{\mathbf{0{,}136\ kg}}$ **= 11 765 s ≈ 3,3 h = 3 h 16 min.**



Cette durée est suffisamment longue pour que la montgolfière puisse se déplacer sur une grande distance.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti.
La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.