EXERCICE C : CESTA PUNTA (5 points)

Mots-clés : Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme ; énergie

La pelote basque est un sport de balle se pratiquant à main nue, avec une raquette en bois ou avec un chistera (gant en osier). La cesta punta est une des spécialités de la pelote basque. Le jeu consiste à renvoyer la balle servie par l'adversaire avec un chistera sur le mur appelé le fronton.
Le service s'effectue sur un terrain rectangulaire sur lequel des lignes de référence sont tracées. Le service s'effectue à 36 mètres du mur, il est réussi lorsque la balle, après avoir rebondi contre le mur, retombe entre les lignes 4 et 7.

Source FFPB

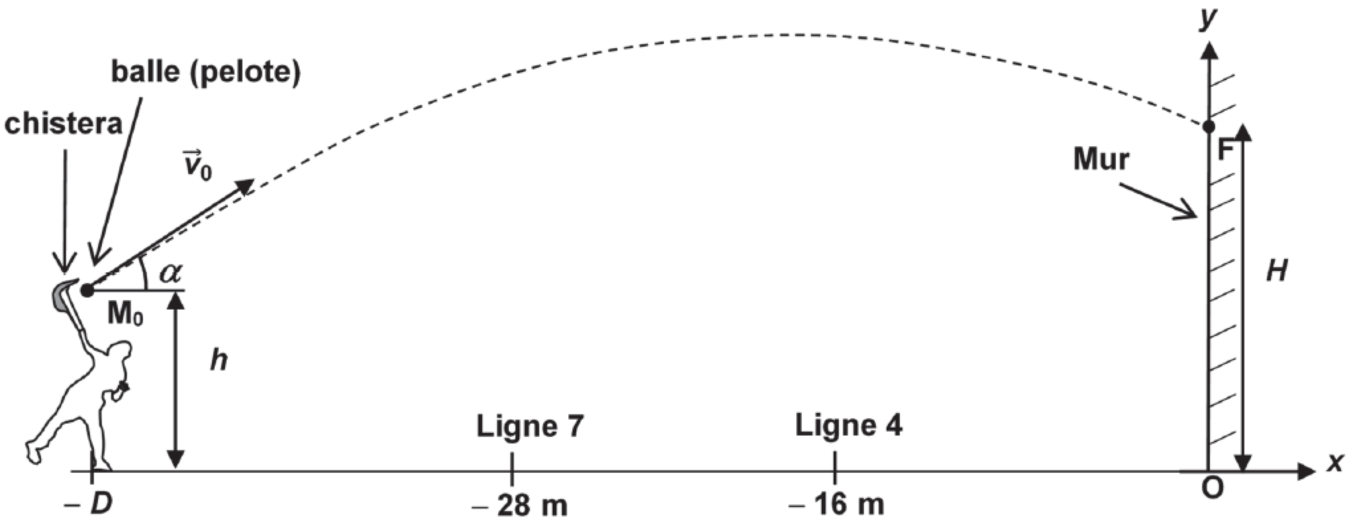


Figure 1. Schéma, qui n'est pas à l'échelle, d'un terrain de pelote basque et allure de la trajectoire de la balle

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni du repère (Ox ; Oy), une balle supposée ponctuelle est envoyée par un joueur depuis un point M0 de coordonnées $x_0 = -D$ et $y_0 = h$. Grâce à son chistera, le joueur lance la balle à une vitesse initiale de norme v_0 dont le vecteur $\vec{v}_0$ forme un angle α avec l'horizontale. Le mouvement de la balle s'effectue dans le champ de pesanteur ; on néglige l'influence de l'air.
Le moment où la balle quitte le chistera est choisi comme origine des dates : $t_0 = 0$ s.
Le but de cet exercice est d'étudier, à l'aide du modèle de la chute libre, le mouvement de la balle afin de prévoir si le service est réussi. Le mouvement est décomposé en deux phases : avant puis après le rebond sur le mur.

Données :

- $D = 36$ m ;
- masse de la balle : $m = 126$ g ;
- valeur mesurée à l'aide d'un radar de la vitesse initiale de la balle : $v_0 = 36{,}2\ m \cdot s^{-1}$;
- $\alpha = 12°$;
- intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

1. Mouvement de la balle avant le rebond sur le mur

1.1. Indiquer l'information de l'énoncé permettant de formuler l'hypothèse que le mouvement de la balle s'effectue dans le cadre du modèle de la chute libre.

Dans le cadre du modèle de la chute libre, le système n'est soumis qu'à poids.
L'énoncé indique « on néglige l'influence de l'air ». Donc seul le poids de la balle est pris en compte : on est donc bien dans le cadre du modèle de la chute libre.

1.2. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation horaire du mouvement de la balle selon l'axe Ox est :

$$x(t) = v_0 \times \cos(\alpha)\, t - D$$

Système {balle} supposée ponctuelle de masse m.

Référentiel terrestre supposé galiléen.

Repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'axes (Ox ; Oy).

Forces : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$; l'action de l'air est négligée.

La deuxième loi de Newton impose : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}$ soit : $\vec{P} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

En projection dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et compte tenu du vecteur $\vec{g}$ vertical et orienté vers le bas, il vient : $\vec{a}\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0$. Ainsi en primitivant, on obtient : $v_x(t) = \text{Cte}_1$.

Coordonnées du vecteur vitesse initiale : $\vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = v_0 \times \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$

Compte tenu du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ on a : $v_x(t) = v_0 \times \cos(\alpha)$.

À chaque instant $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ donc $v_x = \dfrac{dx}{dt}$. Ainsi en primitivant, on obtient :

$$x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t + \text{Cte}_2$$

Conditions initiales, à $t = 0$ s, le projectile est au point de coordonnées ($x(0) = -D$; $y(0) = 0$) donc : $\text{Cte}_2 = -D$.

Finalement : $x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t - D$

1.3. Montrer que la balle frappe le mur à la date $t_F = 1{,}0$ s.

Le mur est situé à l'abscisse $x = 0$ m.

On résout donc l'équation : $x(t_F) = 0$ soit $v_0 \times \cos(\alpha) \times t_F - D = 0$ d'où : $t_F = \dfrac{D}{v_0 \times \cos(\alpha)}$

$t_F = \dfrac{36}{36{,}2 \times \cos(12)} = 1{,}0$ s.

2. Étude énergétique de la balle avant le rebond sur le mur

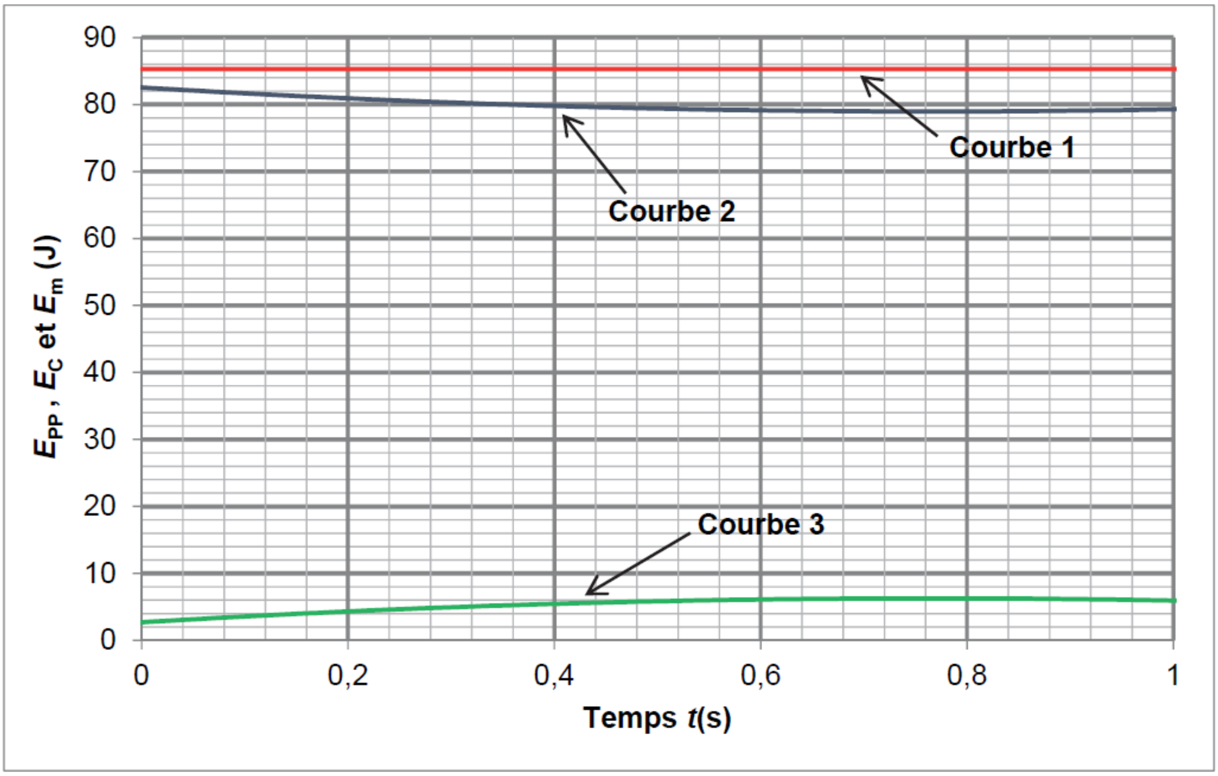


Figure 2. Courbes simulées, à l'aide du modèle de la chute libre, des énergies de la balle avant le rebond.

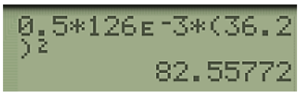
2.1. Rappeler les expressions littérales de l'énergie cinétique E_C, de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP} et de l'énergie mécanique E_m de la balle. L'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'ordonnée y = 0 m. On note v la norme du vecteur vitesse de la balle.

$$\boldsymbol{E_C = \frac{1}{2}mv^2 \; ; \quad E_{PP} = mgy \; ; \quad E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy.}$$

2.2. Calculer la valeur de l'énergie cinétique E_C à la date t = 0 s.

$E_C(t{=}0\text{s}) = \frac{1}{2}mv_0^2$. En convertissant la masse en kg, m = 126 g = 126×10^{-3} kg, il vient :

$E_C(t{=}0\text{s}) = \frac{1}{2} \times 126 \times 10^{-3} \times (36,2)^2 = 82,6$ J.



2.3. En explicitant votre raisonnement, identifier pour chaque courbe de la figure 2 la forme d'énergie correspondante.

La courbe 1 ne varie pas au cours du temps. Il s'agit de l'énergie mécanique E_m, car dans le cadre du modèle de la chute libre l'énergie mécanique se conserve.

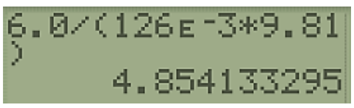
La courbe 2 est décroissante depuis la valeur 82,6 J puis elle croît légèrement. Il s'agit de l'énergie cinétique E_C. En effet, entre t_0 = 0 s et t = 0,8 s la balle s'élève jusqu'à atteindre le sommet de la trajectoire et sa vitesse diminue donc son énergie cinétique diminue. Puis en descendant, l'énergie cinétique de la balle augmente jusqu'à la date t_F = 1,0 s.

La courbe 3 est croissante entre t_0 = 0 s et t = 0,8 s puis elle décroît. Il s'agit de l'énergie potentielle de pesanteur E_{PP}. En effet, E_{PP} est proportionnelle à l'altitude y de la balle. Entre t_0 = 0 s et t = 0,8 s, l'altitude y de la balle augmente puis elle diminue entre t = 0,8 s et t_F = 1,0 s.

2.4. À l'aide de la figure 2, évaluer la valeur de la hauteur H de la balle lorsqu'elle touche le mur au point F.

Au sommet de la trajectoire, pour t = 0,8 s, l'énergie potentielle est maximale et vaut :

$E_{PP} = mgH = 6,0$ J donc $H = \frac{E_{PP}}{m \times g} = \frac{6,0}{126 \times 10^{-3} \times 9,81} = 4,9$ m.



3. Mouvement de la balle après le rebond sur le mur

La balle rebondit sur le mur en F. On fait l'hypothèse que la balle repart à la vitesse v_F = 35 m·s^{-1}.
L'instant du rebond est choisi comme nouvelle origine des dates dans cette partie.
La balle, après avoir rebondi contre le mur, doit retomber entre les lignes 4 et 7 pour que le service soit réussi. Si la ligne 4 n'est pas dépassée, le point est acquis à l'adversaire. Si la ligne 7 est dépassée, le joueur a droit à un second et dernier service.

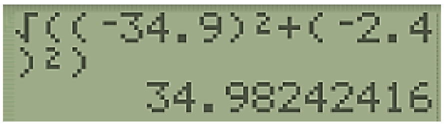
Le mouvement de la balle est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni du repère (O*x* ; O*y*) défini sur la figure 1. L'étude de ce mouvement permet d'établir les équations horaires de la balle :

$$x(t) = -\ 34{,}9\ t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\ 4{,}9\ t^2 - 2{,}4\ t + 4{,}9$$

avec *x* et *y* exprimés en mètre et *t* en seconde.

3.1. Évaluer la valeur de la vitesse v_F à partir des équations horaires de la balle. Comparer avec la valeur donnée ci-dessus.

On a : $v_x = \dfrac{dx}{dt} = -34{,}9$ et $v_y = \dfrac{dy}{dt} = -9{,}8 \times t - 2{,}4$.



À la date $t = 0$: $v_x(0) = -\ 34{,}9$ m.s^{-1} et $v_y(0) = -\ 2{,}4$ m.s^{-1}

$v_F = \sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2} = \sqrt{(-34{,}9)^2 + (-2{,}4)^2}$ = 35 m.s^{-1}.

On retrouve bien la valeur de l'énoncé.

3.2. Interpréter la valeur du coefficient du terme en t^2 dans l'expression de $y(t)$. Préciser son unité.

Le terme – 4,9 devant t^2 est égal à $-\dfrac{g}{2} = -\dfrac{9{,}81}{2}$ = – 4,90 m.s^{-2}.

Ce terme est homogène à une accélération, comme *g*, il s'exprime donc en m.s^{-2}.

À l'aide des équations horaires, on établit que l'équation cartésienne de la trajectoire de la balle est :

$$y = -\ 4{,}0\cdot10^{-3}\ x^2 + 6{,}9\cdot10^{-2}\ x + 4{,}9 \quad \text{avec } x \text{ et } y \text{ exprimés en mètre.}$$

3.3. Le service effectué est-il réussi ?

Lorsque la balle retombe sur le sol, $y = 0$.
Il faut donc résoudre l'équation : $-\ 4{,}0\cdot10^{-3}\ x^2 + 6{,}9\cdot10^{-2}\ x + 4{,}9 = 0$.
Si *x* est compris entre –16 m et – 28 m le service est réussi.
L'équation est de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -\ 4{,}0\cdot10^{-3}$ $b = 6{,}9\cdot10^{-2}$ et $c = 4{,}9$.
Discriminant : $\Delta = b^2 - 4a \times c = (6{,}9\times10^{-2})^2 + 4 \times 4{,}0 \times 10^{-3} \times 4{,}9$ = 0,0831….
Solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6{,}9 \times 10^{-2} + \sqrt{0{,}0831...}}{2 \times (-\ 4{,}0 \times 10^{-3})} = -\ 27 \text{ m.}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6{,}9 \times 10^{-2} - \sqrt{0{,}0831...}}{2 \times (-\ 4{,}0 \times 10^{-3})} = 45 \text{ m. Solution positive qui ne convient pas.}$$

Comme x_1 = – 27 m est compris entre –16 m et – 28 m le service est réussi.